



**MATEMÁTICAS**  
**NIVEL SUPERIOR**  
**PRUEBA 1**

Martes 7 de mayo de 2002 (tarde)

2 horas

Nombre

--

Número

--	--	--	--	--	--	--	--	--

**INSTRUCCIONES PARA LOS ALUMNOS**

- Escriba su nombre, apellido(s) y número de alumno en las casillas de arriba.
- No abra esta prueba hasta que se lo autoricen.
- Conteste todas las preguntas en los espacios provistos.
- Salvo que se indique lo contrario en la pregunta, todas las respuestas numéricas deberán ser exactas o con tres cifras significativas.
- Escriba la marca y el modelo de su calculadora en la casilla de abajo (p.ej., Casio *fx-9750G*, Sharp EL-9600, Texas Instruments TI-85).

Calculadora

Marca	Modelo

EXAMINADOR	LÍDER DE EQUIPO	IBCA
TOTAL /120	TOTAL /120	TOTAL /120

Se otorgará la máxima puntuación a las respuestas correctas. Cuando la respuesta sea incorrecta se otorgarán algunos puntos siempre que aparezca el método empleado y éste sea correcto. Donde sea necesario, se puede utilizar para sus cálculos el espacio debajo del cuadro. Para los resultados obtenidos con calculadora de pantalla gráfica, deberá reflejarse por escrito el proceso seguido hasta su obtención. Por ejemplo, cuando deba utilizar gráficas de una calculadora de pantalla gráfica para hallar soluciones, deberá dibujar esas gráficas en su respuesta. Una respuesta incorrecta sin indicación del método utilizado no recibirá normalmente **ningún** punto.

1. Tomemos la serie aritmética  $2 + 5 + 8 + \dots$

(a) Halle una expresión de  $S_n$ , la suma de los primeros  $n$  términos.

(b) Halle el valor de  $n$  para el cual  $S_n = 1365$ .

*Operaciones:*

*Respuestas:*

(a) \_\_\_\_\_

(b) \_\_\_\_\_

2. Se lanza una partícula según una trayectoria rectilínea. Pasados  $t$  segundos, su velocidad  $v$  en metros por segundo esta dada por  $v = \frac{1}{2 + t^2}$ .
- (a) Halle la distancia recorrida durante el primer segundo.
  - (b) Halle una expresión de la aceleración en el instante  $t$ .

*Operaciones:*

*Respuestas:*

(a) \_\_\_\_\_

(b) \_\_\_\_\_

3. (a) Exprese el número complejo  $8i$  en forma polar.
- (b) Llamaremos  $z$  a la raíz cúbica de  $8i$  que yace en el primer cuadrante. Exprese  $z$
- (i) en forma polar;
  - (ii) en forma cartesiana.

*Operaciones:*

*Respuestas:*

(a) \_\_\_\_\_

(b) (i) \_\_\_\_\_

(ii) \_\_\_\_\_

4. La matriz  $A$  es

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k \\ 1 & k & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Halle los valores de  $k$  para los cuales  $A$  es singular.

*Operaciones:*

*Respuestas:*

5. Halle el ángulo entre los vectores  $\mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$  y  $\mathbf{w} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ . Indique su respuesta en radianes.

*Operaciones:*

*Respuesta:*

6. (a) Utilice la integración por partes para hallar  $\int x^2 \ln x \, dx$  .

(b) Evalúe  $\int_1^2 x^2 \ln x \, dx$  .

*Operaciones:*

*Respuestas:*

(a) \_\_\_\_\_

(b) \_\_\_\_\_

7. La probabilidad de que llueva durante un día de verano en cierta ciudad es de 0,2 . En esta ciudad, la probabilidad de que la temperatura máxima diaria supere los 25 °C es de 0,3 cuando llueva y de 0,6 cuando no llueva. Dado que la temperatura máxima diaria superó los 25 °C en cierto día de verano, halle la probabilidad de que ese día haya llovido.

*Operaciones:*

*Respuesta:*

8. Las ecuaciones vectoriales de las rectas  $L_1$  y  $L_2$  son

$$L_1: r = i + j + k + \lambda(i + 2j + 3k) ;$$
$$L_2: r = i + 4j + 5k + \mu(2i + j + 2k) .$$

Las dos rectas se cortan en el punto P . Halle el vector de posición de P .

*Operaciones:*

*Respuesta:*

9. Cuando Juan arroja una piedra contra un blanco, la probabilidad de que acierte en el blanco es de 0,4 . Juan arroja una piedra 6 veces.

- (a) Halle la probabilidad de que acierte en el blanco **exactamente** 4 veces.
- (b) Halle la probabilidad de que acierte por primera vez en el blanco la tercera vez que arroja una piedra.

*Operaciones:*

*Respuestas:*

- (a) \_\_\_\_\_
- (b) \_\_\_\_\_

10. El ángulo  $\theta$  satisface la ecuación  $\tan\theta + \cot\theta = 3$ , donde  $\theta$  está expresado en grados. Halle todos los valores posibles de  $\theta$  en el intervalo  $]0^\circ, 90^\circ[$ .

*Operaciones:*

*Respuestas:*

11. Los pesos de cierta especie de pájaro tienen distribución normal, con una media de 0,8 kg y una desviación típica de 0,12 kg. Halle la probabilidad de que el peso de un pájaro de la especie, elegido en forma aleatoria, esté entre 0,74 kg y 0,95 kg.

*Operaciones:*

*Respuesta:*

12. La función  $f$  está definida en el dominio  $[0, \pi]$  por  $f(\theta) = 4 \cos \theta + 3 \operatorname{sen} \theta$ .

(a) Exprese  $f(\theta)$  de la forma  $R \cos(\theta - \alpha)$  donde  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .

(b) A partir de ello, o de otra manera, escriba el valor de  $\theta$  para el cual  $f(\theta)$  es máxima.

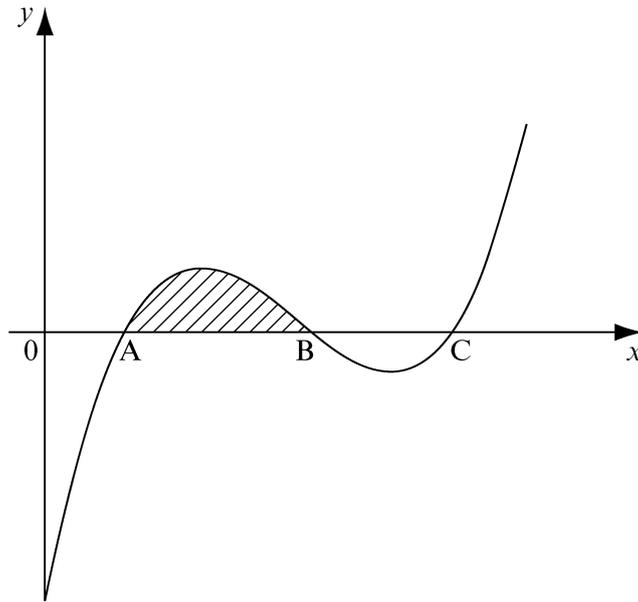
*Operaciones:*

*Respuestas:*

(a) \_\_\_\_\_

(b) \_\_\_\_\_

13. En la figura siguiente se muestra parte de la curva  $y = x^3 - 7x^2 + 14x - 7$ . La curva cruza el eje de las  $x$  en los puntos A, B y C.



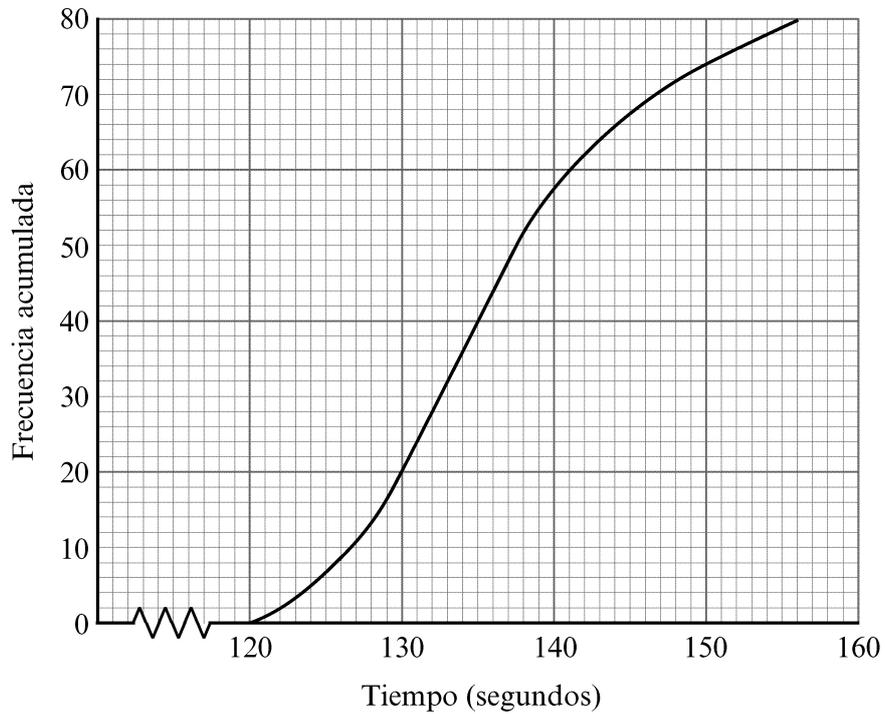
- (a) Halle el valor de la coordenada  $x$  de A.
- (b) Halle el valor de la coordenada  $x$  de B.
- (c) Halle el área de la región sombreada.

*Operaciones:*

*Respuestas:*

- (a) \_\_\_\_\_
- (b) \_\_\_\_\_
- (c) \_\_\_\_\_

14. Se exigió a los 80 postulantes al curso de Ciencias de los Deportes que corrieran 800 metros y se registraron sus tiempos. Los resultados se utilizaron para crear la siguiente gráfica de la frecuencia acumulada.



Estime:

- (a) la mediana;
- (b) el rango intercuartil.

*Operaciones:*

*Respuestas:*

(a) \_\_\_\_\_

(b) \_\_\_\_\_

15. La función uno a uno  $f$  está definida en el dominio  $x > 0$  por  $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ .

(a) Indique el rango  $A$  de  $f$ .

(b) Halle una expresión de  $f^{-1}(x)$  para  $x \in A$ .

*Operaciones:*

*Respuestas:*

(a) \_\_\_\_\_

(b) \_\_\_\_\_

16. Halle el conjunto de valores de  $x$  para los cuales  $(e^x - 2)(e^x - 3) \leq 2e^x$ .

*Operaciones:*

*Respuesta:*

17. La ecuación de una curva es  $xy^3 + 2x^2y = 3$ . Halle la ecuación de la tangente a esta curva en el punto  $(1, 1)$ .

*Operaciones:*

*Respuesta:*

18. Una transformación  $T$  del plano es representada por la matriz

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a)  $T$  transforma el punto  $P$  en el punto  $(8, 5)$ . Halle las coordenadas de  $P$ .
- (b) Halle las coordenadas de todos los puntos que se transforman en sí mismos bajo  $T$ .

*Operaciones:*

*Respuestas:*

(a) \_\_\_\_\_

(b) \_\_\_\_\_

19. Se traza un rectángulo tal que sus vértices inferiores están sobre el eje  $x$  y sus vértices superiores están sobre la curva  $y = e^{-x^2}$ . El área de este rectángulo se denomina  $A$ .
- (a) Escriba una expresión de  $A$  en función de  $x$ .
- (b) Halle el valor máximo de  $A$ .

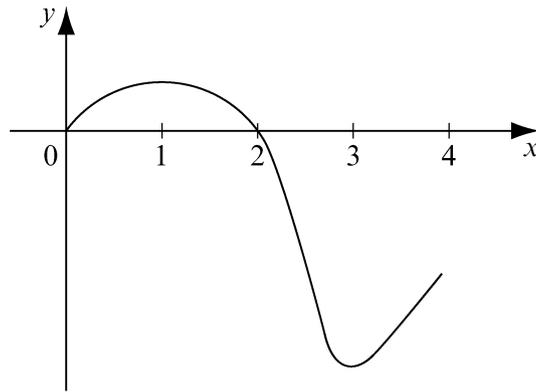
*Operaciones:*

*Respuestas:*

(a) \_\_\_\_\_

(b) \_\_\_\_\_

20. En el diagrama que sigue se muestra la gráfica de  $y_1 = f(x)$ ,  $0 \leq x \leq 4$ .



En los ejes a continuación, trace la gráfica de  $y_2 = \int_0^x f(t) dt$ , y marque claramente los puntos de inflexión.

